

8. Yager, R. Essentials of Fuzzy Model and Control [Text] / R. Yager, D. Filev. – USA: John Wiley & Sons, 1984. – 387 p.
9. Zadeh, L. A. From Circuit Theory to System Theory [Text] / L. A. Zadeh // Proceedings of the IRE. – 1962. – Vol. 50, Issue 5. – P. 856–865. doi: 10.1109/jrproc.1962.288302
10. Маляр, М. Схема паралельно-послідовного відсіву варіантів для задачі вибору [Текст] / М. Маляр, О. Швалагін // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2011. – Т. 1, № 4(49). – С. 39–42. – Режим доступу : <http://journals.urau.ua/eejet/article/view/1911/1806>

*Запропоновано метод побудови класифікаційних нечітких баз знань, в яких носієм експертної інформації є трендові правила «причини – наслідки». Показано, що класифікаційні нечіткі правила, які з'єднують міри значимостей причин і наслідків за допомогою нечітких квантифікаторів, представляють множину розв'язків системи нечітких логічних рівнянь для заданих класів виходу*

*Ключові слова: нечіткі відношення, обернене логічне виведення, розв'язання систем нечітких логічних рівнянь*

*Предложен метод построения классификационных нечетких баз знаний, в которых носителем экспертной информации являются трендовые правила «причины – следствия». Показано, что классификационные нечеткие правила, которые связывают меры значимостей причин и следствий с помощью нечетких квантификаторов, представляют множество решений системы нечетких логических уравнений для заданных классов выхода*

*Ключевые слова: нечеткие отношения, обратный логический вывод, решение систем нечетких логических уравнений*

УДК 681.5.015:007  
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.36934

# ПОБУДОВА КЛАСИФІКАЦІЙНОЇ НЕЧІТКОЇ БАЗИ ЗНАНЬ НА ОСНОВІ ТРЕНДОВИХ ПРАВИЛ І ОБЕРНЕНОГО ВИВЕДЕННЯ

**Г. Б. Ракитянська**

Кандидат технічних наук, доцент  
Кафедра програмного забезпечення  
Вінницький національний технічний університет  
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна, 21021  
E-mail: h\_rakit@ukr.net

## 1. Вступ

Побудова класифікаційних нечітких правил ЯКЩО-ТО полягає у визначенні значень входів, які відповідають заданому класу виходу [1, 2]. На практиці експерту для заданої частини ТО необхідно підібрати частину ЯКЩО. Ця задача відноситься до класу обернених [3] і полягає у відновленні значень вхідних змінних, які найкращим чином пояснюють спостереження [4].

Зручним інструментом формалізації експертної інформації при моделюванні причинно-наслідкових зв'язків є композиційне правило виведення Заде [5], яке зв'язує вхідні і вихідні змінні об'єкта (причини і наслідки) за допомогою матриці нечітких відношень. Задача відновлення входів (причин) формулюється у вигляді оберненого нечіткого логічного виведення і потребує розв'язання системи нечітких логічних рівнянь. Аналітичні [6, 7] і чисельні [8–10] методи розв'язання нечітких логічних рівнянь з *max-min* композицією досліджуються протягом багатьох років. Не дивлячись на те, що теоретичні основи нечітких логічних рівнянь є добре розвинутими, такі рівняння потребують більш ефективного використання їх потенціалу для моделювання систем.

## 2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Традиційно задача побудови нечіткої бази знань вирішується у два етапи. На першому етапі генеруються абдуктивні гіпотези [11, 12]. На другому етапі здійснюється селекція правил, в основі якої лежить поняття подібності [13]. Метою селекції є пониження складності системи шляхом видалення неефективних і надлишкових правил і підвищення точності виведення шляхом вибору альтернативних правил. На сьогодні немає єдиного методичного стандарту для налаштування структури правил. Сучасні генетичні системи здійснюють селекцію за допомогою мір оцінювання, які визначають ступінь значущості правил-кандидатів у покритті навчальної вибірки та виникненні помилок класифікації. Міри подібності та зв'язаності [14, 15] або вагові коефіцієнти [16, 17] використовуються для генерування правил-кандидатів, злиття або відбору альтернативних правил. Багатоцільові генетичні алгоритми використовують ці критерії для побудови функції відповідності з метою автоматичного проектування точних і компактних баз правил.

В цій статті пропонується підхід до генерування правил на основі формалізації причинно-наслідкових зв'язків у термінах рівнянь нечітких відношень [6, 7].

Система класифікаційних правил ЯКЩО-ТО може бути перетворена до множини лінгвістичних розв'язків рівнянь нечітких відношень шляхом переходу до сполученої системи нечітких термів [18], де міри значимостей нечітких термів причин і наслідків (*підвищення, падіння*) описуються нечіткими квантифікаторами (*значне підвищення, суттєве падіння*) [19, 20]. Такий перехід дозволяє з'єднати причини і наслідки трендовими правилами, а міри значимостей причин і наслідків – сполученими правилами, які є якісними розв'язками рівнянь нечітких відношень для заданих класів виходу [19, 20]. Прикладом трендового правила є:

– ЯКЩО попит *зростає* І запас *зменшується* ТО ціна *зростає*.

Прикладом сполученого правила є:

– ЯКЩО *значне зростання* попиту І *суттєве зменшення* запасу;

– АБО *різке зростання* попиту І *незначне зростання* запасу;

– ТО ціна *значно зростає*.

Таким чином, задача генерування правил зводиться до розв'язання системи рівнянь нечітких відношень, що дозволяє уникнути процедури селекції правил. В роботах [19, 20] використовувались трендові нечіткі відношення, що потребувало розв'язання системи нечітких логічних рівнянь із розширеною *max-min* композицією і вимагало значних обчислювальних витрат [10]. В цій роботі пропонується використовувати трендові нечіткі правила, що дозволить понизити обчислювальну складність за рахунок розв'язання ієрархічної системи нечітких логічних рівнянь з *max-min* і двоїстою *min-max* композицією [2]. Розв'язання рівнянь нечітких відношень за допомогою генетичного алгоритму забезпечує оптимальну кількість нечітких правил для кожного вихідного терму і оптимальну форму функцій належності вхідних термів для кожного лінгвістичного розв'язку.

### 3. Ціль та задачі дослідження

Метою даної роботи є розвинути підхід [19, 20] до побудови абдуктивних міркувань на основі трендових правил, що дозволить понизити складність задачі генерування класифікаційних нечітких баз знань. В цьому випадку задача оберненого виведення потребує розв'язання системи нечітких логічних рівнянь з ієрархічною *max-min/min-max* композицією [2].

Для досягнення поставленої мети вирішувались наступні задачі:

– розробка нечіткої моделі об'єкта на основі трендових і сполучених правил;

– розробка алгоритму побудови класифікаційної нечіткої бази знань на основі оберненого логічного виведення.

## 4. Метод побудови класифікаційної нечіткої бази знань

### 4. 1. Апроксимація трендовими і сполученими нечіткими правилами

Розглядається об'єкт виду  $y=f(X)$  з  $n$  входами  $X=(x_1,...,x_n)$  і виходом  $y$ , для якого взаємозв'язок «входи - вихід» може бути представлений у ви-

гляді системи класифікаційних нечітких правил ЯКЩО-ТО [1]:

$$\bigcup_{p=1, Z_j} [\bigcap_{i=1, n} (x_i = a_i^{jp})] \rightarrow y = d_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

де  $a_i^{jp}$  – нечіткий терм, який оцінює змінну  $x_i$  в правилі з номером  $jp$ ;  $d_j$  – нечіткий терм, який оцінює змінну  $y$ ;  $z_j$  – кількість правил, що відповідають терму  $d_j$ .

Нечітка база знань (1) може бути перетворена до множини лінгвістичних розв'язків системи рівнянь нечітких відношень шляхом переходу до сполученої системи нечітких термів.

Нехай:  $\{c_{i1}, ..., c_{ik_i}\}$  – множина нечітких термів причин для оцінки параметра  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\{E_1, ..., E_M\}$  – множина нечітких термів наслідків для оцінки параметра  $y$ . Перепозначимо множину причин як  $\{C_1, ..., C_N\} = \{c_{i1}, ..., c_{ik_i}, ..., c_{n1}, ..., c_{nk_n}\}$ , де  $N = k_1 + ... + k_n$ .

Взаємозв'язок «причини – наслідки» будемо задавати системою трендових нечітких правил [1]:

$$\bigcup_{p=1, Z_J} [\bigcap_{i=1, n} (x_i = B_i^{jp})] \rightarrow y = E_J, \quad J = \overline{1, M}, \quad (2)$$

де  $B_i^{jp}$  – нечіткий терм причини, який описує змінну  $x_i$  в рядку з номером  $p = 1, Z_J$ ,  $B_i^{jp} \in \{c_{i1}, ..., c_{ik_i}\}$ ;  $Z_J$  – кількість правил, що відповідають класу виходу  $E_J$ .

Нечіткій базі знань (2) відповідає система нечітких логічних рівнянь, яка зв'язує функції належності нечітких термів причин і наслідків [1]:

$$\mu^{E_J}(y) = \max_{p=1, Z_J} [w_{jp}^R \min_{i=1, n} (\mu^{B_i^{jp}}(x_i))], \quad J = \overline{1, M}, \quad (3)$$

де  $\mu^{E_J}(y)$  – функція належності змінної  $y$  до терму  $E_J$ ;  $\mu^{B_i^{jp}}(x_i)$  – функція належності змінної  $x_i$  до терму  $B_i^{jp}$ ;  $w_{jp}^R$  – вага правила з номером  $jp$ .

Взаємозв'язок «причини – наслідки» у трендових правилах (2) будемо задавати ієрархічною системою матриць відношень  $R \subseteq H_L \times E_J = [r_{lj}], L = \overline{1, K}, J = \overline{1, M}$  і  $V \subseteq C_1 \times H_L = [v_{ll}], I = \overline{1, N}, L = \overline{1, K}$ , де  $H_L$  – комбінація вхідних термів у правилі з номером  $L$ ;  $K$  – число комбінацій вхідних термів у (2). Елемент матриці нечітких відношень  $R$  – це вага правила  $r_{lj} \in [0, 1]$ , яка характеризує ступінь впливу комбінації причин  $H_L$  на виникнення наслідку  $E_J$ . Елемент бінарної матриці  $V$  – це вага терму  $v_{ll} \in \{0, 1\}$ , де  $v_{ll} = 1(0)$  якщо терм  $C_1$  присутній (відсутній) у комбінації причин  $H_L$ .

За наявності матриць  $R$  і  $V$  система нечітких логічних рівнянь (3) може бути представлена у вигляді ієрархічної системи рівнянь нечітких відношень з *max-min* і двоїстим *min-max* правилами композиції [2]

$$\mu^{E_J} = \max_{L=1, K} (\min(\mu^{H_L}, r_{lj})), \quad J = \overline{1, M}, \quad (4)$$

$$\mu^{H_L} = \min_{i=1, N} (\max(\mu^{C_i}, v_{li})), \quad L = \overline{1, K}. \quad (5)$$

Тут  $\mathbf{m}^C = (\mu^{C_1}, ..., \mu^{C_N})$  – вектор мір значимостей причин  $C_1$ ;  $\mathbf{m}^E = (\mu^{E_1}, ..., \mu^{E_M})$  – вектор мір значимостей наслідків  $E_J$ ;  $\mathbf{m}^H = (\mu^{H_1}, ..., \mu^{H_K})$  – вектор мір значимостей комбінацій причин  $H_L$ .

Для кожного класу  $d_j$  множина розв'язків системи рівнянь (3) може бути представлена у вигляді системи сполучених правил ЯКЩО-ТО, яка еквівалентна системі (1):

$$\bigcup_{p=1, z_j} \bigcap_{i=1, n} \{\mu^{A_i^{jp}}(x_i) = \alpha_i^{jp}\} \rightarrow y = d_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

де  $A_i^{jp}$  – нечіткий терм причини, який оцінює змінну  $x_i$  в правилі з номером  $jp$ ;  $\alpha_i^{jp}$  – нечіткий квантифікатор, який описує міру значимості причини  $A_i^{jp}$  в правилі з номером  $p=1, z_j$ .

Шляхом переходу від термів  $\alpha_i^{jp}$ , що описують міри значимостей  $\mu^{A_i^{jp}}$ , до термів  $a_i^{jp}$ , що описують змінні  $x_i$ , система правил (6) переписується у вигляді:

$$\bigcup_{p=1, z_j} \bigcap_{i=1, n} (x_i = (A_i^{jp}, \alpha_i^{jp})) \rightarrow y = d_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

де  $a_i^{jp} = (A_i^{jp}, \alpha_i^{jp})$  – сполучений терм, що описує змінну  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , в правилі з номером  $jp$ .

Нечіткій базі знань (7) відповідають нечіткі логічні рівняння, які зв'язують функції належності сполучених термів у розв'язках системи (3) [1]:

$$\mu^{d_j}(y) = \max_{p=1, z_j} [w_{jp}^r \min_{i=1, n} \{\mu^{a_i^{jp}}(x_i)\}], \quad j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

де  $\mu^{d_j}(y)$  – функція належності змінної  $y$  до класу  $d_j$ ;  $\mu^{a_i^{jp}}(x_i)$  – функція належності змінної  $x_i$  до сполученого терму  $a_i^{jp} = (A_i^{jp}, \alpha_i^{jp})$ ;  $w_{jp}^r$  – вага правила з номером  $jp$ .

У нечітких логічних рівняннях використовується така функція належності нечіткого терму  $T$  [1]:

$$\mu^T(u) = 1 / (1 + ((u - \beta) / \sigma)^2), \quad (9)$$

де  $\beta$  – координата максимуму функції,  $\mu^T(\beta) = 1$ ;  $\sigma$  – параметр концентрації.

Операція дефазифікації виконується за формулою [1]:

$$y = \sum_{j=1}^m y_j^r \mu^{d_j}(y) / \sum_{j=1}^m \mu^{d_j}(y). \quad (10)$$

де  $y_j^r$  – границі класів рішень  $d_j$ .

#### 4. 2. Задача оптимізації для оберненого виведення

Якщо правила (7) є розв'язками системи нечітких логічних рівнянь (3), то для якісних значень входів  $x_i = a_i^{jp}$  і виходу  $y = d_j$  у розв'язку з номером  $jp$  виконується співвідношення:

$$\mu^{E_j}(d_j) = \max_{p=1, z_j} [w_{jp}^R \min_{i=1, n} \{\mu^{B_i^{jp}}(a_i^{jp})\}], \quad j = \overline{1, M}.$$

де  $\mu^{E_j}(d_j)$  і  $\mu^{B_i^{jp}}(a_i^{jp})$  – ступені належності якісних значень  $x_i = a_i^{jp}$  і  $y = d_j$  до нечітких термів  $E_j$  і  $B_i^{jp}$ .

Тоді виникає задача оберненого виведення, яка формулюється так: для заданих класів виходу  $y = d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , знайти кількість правил  $z_j$  і відновити форми функцій належності входів  $x_i = a_i^{jp}$  у кожному правилі.

Побудова нечітких правил (7) потребує розв'язання системи нечітких логічних рівнянь (4), (5) для відомої

матриці відношень  $R$  та якісних значень виходу  $y = d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Елементами розв'язку (6) системи рівнянь (4), (5) є значення вхідних змінних  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , для яких  $\mu^{A_i^{jp}}(x_i) = \alpha_i^{jp}$ ,  $p = \overline{1, z_j}$ . Будемо інтерпретувати ці значення вхідних змінних як координати максимуму функцій належності нечітких термів  $A_i^{jp}$ , що описують змінну  $x_i$  в рядку  $jp$ ,  $p = \overline{1, z_j}$ , бази знань (7), де значенню виходу  $y = d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , відповідає  $z_j$  лінгвістичних розв'язків системи (4), (5).

Вибір комбінацій причин або термів  $A_i^{jp}$  для класу  $d_j$  здійснюється на основі розв'язання системи рівнянь (4) з *max-min* композицією.

Нехай  $\mu_j^H = (\mu_j^{H_1}, \dots, \mu_j^{H_K})$  – вектор мір значимостей комбінацій причин для класу  $y = d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Дотримуючись підходу [2, 8–10], задача розв'язання системи нечітких логічних рівнянь (4) формулюється так. Для кожного значення виходу  $y = d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , знайти вектор мір значимостей комбінацій причин  $\mu_j^H = (\mu_j^{H_1}, \dots, \mu_j^{H_K})$ , який задовольняє обмеження  $\mu_j^{H_L} \in [0, 1]$ ,  $L = \overline{1, K}$ , і забезпечує мінімальну відстань між спостережуваними і модельними мірами значимості наслідків:

$$F_1 = \sum_{j=1}^M \left[ \mu^{E_j}(d_j) - \max_{L=1, K} (\min(\mu_j^{H_L}, r_{Lj})) \right]^2 = \min_{\mu_j^H}. \quad (11)$$

Міри значимості комбінацій причин у класі  $d_j$  визначаються єдиним максимальним розв'язком  $\mu_j^H = (\mu_j^{H_1}, \dots, \mu_j^{H_K})$  системи рівнянь (4) [6, 7]<sub>H</sub>.

Пошук максимального розв'язку  $\mu_j^H$  здійснюється шляхом багаторазового розв'язання задачі оптимізації (11) і починається з пошуку її нульового розв'язку  $\mu_{j_0}^H = (\mu_{j_0}^{H_1}, \dots, \mu_{j_0}^{H_K})$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Верхня границя  $(\mu_{j_0}^{H_L})$  знаходиться в діапазоні  $[\mu_{j_0}^{H_L}, 1]$ .

Нехай  $\mu_j^H(t) = (\mu_j^{H_1}(t), \dots, \mu_j^{H_K}(t))$  – розв'язок задачі оптимізації (11) на  $t$ -ому кроці формування розв'язку  $\mu_j^H$ . При пошуку верхніх границь  $(\mu_{j_0}^{H_L})$  передбачається, що  $F_1(\mu_j^H(t)) = F_1(\mu_{j_0}^H)$  і  $\mu_j^{H_L}(t) \geq \mu_{j_0}^{H_L}(t-1)$ . Встановлення верхніх границь здійснюється за правилом: якщо  $\mu_j^H(t) \neq \mu_{j_0}^H(t-1)$ , то  $\mu_{j_0}^{H_L} = \mu_j^{H_L}(t)$ ,  $L = \overline{1, K}$ . Якщо  $\mu_j^H(t) = \mu_{j_0}^H(t-1)$ , то пошук розв'язку  $\mu_j^H$  припиняється.

Визначення границь  $\beta$ -параметрів правил здійснюється шляхом розв'язання системи рівнянь (5) з двоїстою *min-max* композицією.

Нехай  $B_j = (\beta_1^j, \dots, \beta_N^j) = (\beta_{1k_1}^j, \dots, \beta_{1k_{n_1}}^j, \dots, \beta_{nk_1}^j, \dots, \beta_{nk_{n_2}}^j)$  – вектор координат максимуму функцій належності нечітких термів для класу  $y = d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Дотримуючись підходу [2, 8–10], задача розв'язання системи нечітких логічних рівнянь (5) формулюється так. Для кожного значення виходу  $y = d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , знайти вектор координат максимуму  $B_j = (\beta_1^j, \dots, \beta_N^j)$ , який задовольняє обмеження  $\beta_{il}^j \in [x_i, x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , і забезпечує мінімальну відстань між спостережуваними і модельними мірами значимості комбінацій причин:

$$F_2 = \sum_{l=1}^K \left[ \mu_j^{H_L}(d_j) - \min_{i=1, N} (\max(\mu^{C_i}(\beta_i^j), \bar{v}_{il})) \right]^2 = \min_{B_j}. \quad (12)$$

Для кожного класу  $d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , єдиному максимальному розв'язку  $\mu_j^H = (\mu_j^{H_1}, \dots, \mu_j^{H_K})$  системи (4) відповідає множина розв'язків  $S_j(R, d_j)$  системи (5), яка визначається єдиним мінімальним розв'язком  $B_j$  і множиною максимальних розв'язків  $S_j(\mu_j^H) = \{\bar{B}_{jh}, h = \overline{1, z_j^*}\}$ :

$$S_j(\mathbf{R}, d_j) = \bigcup_{\mathbf{B}_{jh} \in S_j} [\mathbf{B}_j, \bar{\mathbf{B}}_{jh}]. \quad (13)$$

Тут  $\mathbf{B}_j = (\beta_1^j, \dots, \beta_N^j)$  і  $\bar{\mathbf{B}}_{jh} = (\bar{\beta}_1^{jh}, \dots, \bar{\beta}_N^{jh})$  – вектори нижніх і верхніх границь координат максимуму  $\beta_{il}^{jp}$ , де операція об'єднання виконується над усіма  $\mathbf{B}_{jh} \in S_j(\mu_j)$ . Передбачається, що із збільшенням (зменшенням) абсолютного значення параметра  $\beta_i^j$ , збільшується (зменшується) міра значимості  $\mu^{c_i}(\beta_i^j)$ .

Формування інтервалів (13) здійснюється шляхом багаторазового розв'язання задачі оптимізації (12) і починається з пошуку її нульового розв'язку  $\mathbf{B}_{j0} = (\beta_1^{j0}, \dots, \beta_N^{j0})$ ,  $j=1, m$ . Нижня границя  $(\beta_{il}^j)$  знаходиться в діапазоні  $[\underline{x}_i, \beta_{il}^{j0}]$ . Верхня границя  $(\beta_{il}^j)$  для  $h=1$  знаходиться в діапазоні  $[\beta_{il}^{j0}, x_i]$ , а для  $h>1$  – в діапазоні  $[\underline{x}_{il}, x_i]$ , причому із області пошуку вилучаються максимальні розв'язки  $\beta_{il}^{jp}$ ,  $p < h$ .

Нехай  $\mathbf{B}_j(t) = (\beta_1^j(t), \dots, \beta_N^j(t))$  – розв'язок задачі оптимізації (12) на  $t$ -ому кроці формування інтервалів (13), тобто  $F_2(\mathbf{B}_j(t)) = F_2(\mathbf{B}_{j0})$ , оскільки для всіх  $\mathbf{B}_j \in S_j(\mathbf{R}, d_j)$  значення критерію (12) однакове. При пошуку верхніх границь  $(\beta_{il}^j)$  передбачається, що  $\beta_i^j(t) \geq \beta_i^j(t-1)$ , а при пошуку нижніх границь  $(\beta_{il}^j)$  передбачається, що  $\beta_i^j(t) \leq \beta_i^j(t-1)$ . Встановлення верхніх (нижніх) границь здійснюється за правилом: якщо  $\mathbf{B}_j(t) \neq \mathbf{B}_j(t-1)$ , то  $\bar{\beta}_{il}^{jh}(\beta_{il}^j) = \beta_i^j(t)$ ,  $I = 1, N$ . Якщо  $\mathbf{B}_j(t) = \mathbf{B}_j(t-1)$ , то формування інтервального розв'язку  $[\underline{\mathbf{B}}_j, \bar{\mathbf{B}}_{jh}]$  припиняється. Пошук інтервалів (13) продовжується, доки виконується умова  $\mathbf{B}_{jh} \neq \mathbf{B}_{jp}$ ,  $p < h$ .

Генетичний алгоритм розв'язання задач оптимізації (11), (12) реалізований у середовищі MATLAB. Для реалізації генетичного алгоритму хромосома визначається як вектор-рядок двійкових кодів розв'язків  $\mu_j^{H_i}$  і  $\beta_i^j$ ,  $L = 1, K$ ,  $I = 1, N$ ,  $j=1, m$ . Операція схрещування виконується шляхом обміну частин хромосом в кожному розв'язку  $\mu_j^{H_i}$  і  $\beta_i^j$ . Функція відповідності будується на основі критеріїв (11) і (12). Формування інтервальних розв'язків здійснюється шляхом багаторазового запуску генетичного алгоритму із встановленням уточнених границь області пошуку. Умовою завершення алгоритму є відсутність нових верхніх і нижніх границь протягом заданого проміжку часу.

## 5. Результати комп'ютерного експерименту

Розглянемо об'єкт «два входи – один вихід», який має еталонну аналітичну модель виду:

$$y = ((2z - 0.9)(7z - 1)(17z - 19)(15z - 2)) / 10,$$

де  $z = ((x_1 - 3.0)^2 + (x_2 - 2.5)^2) / 40$ . Модель-еталон зображена на рис. 1.

Трендові правила, надані експертом, представлені в табл. 1. Нечіткими причинами є:  $c_{11}$  зниження до 0,  $c_{12}$  наближення до 3.0,  $c_{13}$  підвищення до 6.0 для  $x_1$ ;  $c_{21}$  зниження до 0,  $c_{22}$  наближення до 3.0 для  $x_2$ . Нечіткими наслідками є:  $E_1$  зниження до -0.7,  $E_2$  наближення до 1.0,  $E_3$  підвищення до 3.5. Для побудови нечітких відношень використовувався метод парних порівнянь [8, 9].

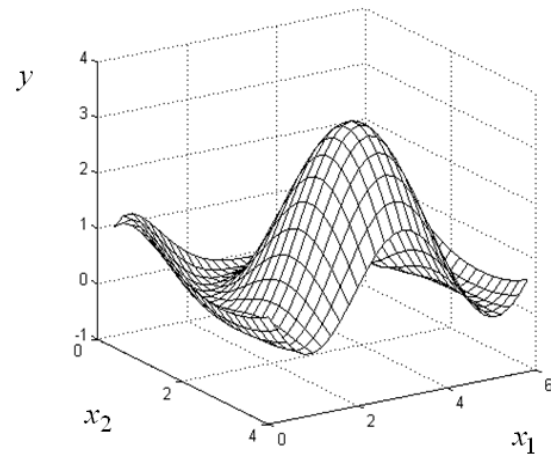


Рис. 1. Модель-еталон

Таблиця 1

Експертні трендові правила

№	ЯКЩО		ТО y		
	$x_1$	$x_2$	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$H_1$	$c_{11}$	$c_{21}$	0.45	0.89	0.11
$H_2$	$c_{11}$	$c_{22}$	0.78	0.33	0.11
$H_3$	$c_{12}$	$c_{21}$	0.45	0.21	0.11
$H_4$	$c_{12}$	$c_{22}$	0.45	0.21	0.89
$H_5$	$c_{13}$	$c_{21}$	0.45	0.89	0.11
$H_6$	$c_{13}$	$c_{22}$	0.78	0.33	0.11

Система нечітких логічних рівнянь для генерування правил – розв'язків має вигляд:

$$\begin{aligned} \mu^{E_1} &= (\mu^{H_1} \wedge 0.45) \vee (\mu^{H_2} \wedge 0.78) \vee (\mu^{H_3} \wedge 0.45) \vee \\ &\vee (\mu^{H_4} \wedge 0.45) \vee (\mu^{H_5} \wedge 0.45) \vee (\mu^{H_6} \wedge 0.78) \\ \mu^{E_2} &= (\mu^{H_1} \wedge 0.89) \vee (\mu^{H_2} \wedge 0.33) \vee (\mu^{H_3} \wedge 0.21) \vee \\ &\vee (\mu^{H_4} \wedge 0.21) \vee (\mu^{H_5} \wedge 0.89) \vee (\mu^{H_6} \wedge 0.33) \\ \mu^{E_3} &= (\mu^{H_1} \wedge 0.11) \vee (\mu^{H_2} \wedge 0.11) \vee (\mu^{H_3} \wedge 0.11) \vee \\ &\vee (\mu^{H_4} \wedge 0.89) \vee (\mu^{H_5} \wedge 0.11) \vee (\mu^{H_6} \wedge 0.11), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \mu^{H_1} &= \mu^{c_{11}} \wedge \mu^{c_{21}}, \\ \mu^{H_2} &= \mu^{c_{11}} \wedge \mu^{c_{22}}, \\ \mu^{H_3} &= \mu^{c_{12}} \wedge \mu^{c_{21}}, \\ \mu^{H_4} &= \mu^{c_{12}} \wedge \mu^{c_{22}}, \\ \mu^{H_5} &= \mu^{c_{13}} \wedge \mu^{c_{21}}, \\ \mu^{H_6} &= \mu^{c_{13}} \wedge \mu^{c_{22}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Задача полягала у побудові сполучених правил, які описують об'єкт для  $m=5$ . Параметри функцій належності нечітких термів  $E_1 \div E_3$  і  $d_1 \div d_5$ , встановлені



експертом, представлені в табл. 2. Для кожного класу  $d_1 \div d_5$  міри значимостей  $\mu^E(d_j)$  визначались за допомогою функцій належності на рис. 2:

$$\mu^E(d_1) = (\mu^{E_1} = 0.90; \mu^{E_2} = 0.25; \mu^{E_3} = 0.08);$$

$$\mu^E(d_2) = (\mu^{E_1} = 0.63; \mu^{E_2} = 0.40; \mu^{E_3} = 0.09);$$

$$\mu^E(d_3) = (\mu^{E_1} = 0.36; \mu^{E_2} = 0.81; \mu^{E_3} = 0.25);$$

$$\mu^E(d_4) = (\mu^{E_1} = 0.11; \mu^{E_2} = 0.27; \mu^{E_3} = 0.70);$$

$$\mu^E(d_5) = (\mu^{E_1} = 0.09; \mu^{E_2} = 0.18; \mu^{E_3} = 0.90).$$

Таблиця 2

Параметри функцій належності нечітких термів змінної у

Параметр	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	
$\beta$ -	0.05	1.14	3.40	0.25	0.50	1.30	2.60	3.00
$\sigma$ -	0.34	0.27	0.64	0.25	0.25	0.60	0.60	0.60

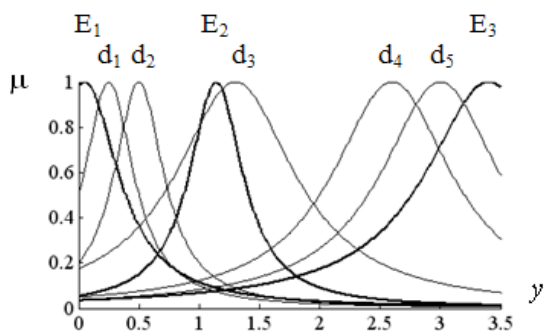


Рис. 2. Функції належності нечітких термів змінної у

Для кожного класу  $d_1 \div d_5$  за допомогою генетичного алгоритму отримана множина розв'язків для  $\beta$ -параметрів сполучених правил, які представлені в табл. 3. Інтервали значень  $\beta$ -параметрів визначались за допомогою функцій належності нечітких причин, параметри яких представлені в табл. 4.

Таблиця 3

Параметри сполучених правил

№	ЯКЩО				ТО
	$A_1^{jp}$	$x_1$	$A_2^{jp}$	$x_2$	у
11	$c_{11}$	[0, 0.39]	$c_{22}$	[2.50, 3.50]	$d_1$
12	$c_{13}$	[5.62, 6.0]	$c_{22}$	[2.50, 3.50]	
13	$c_{12}$	1.64 або 4.35	$c_{21}$	1.02	
21	$c_{11}$	[0, 0.56]	$c_{22}$	2.28 або 3.71	$d_2$
22	$c_{13}$	[5.45, 6.0]	$c_{22}$	2.28 або 3.71	
23	$c_{12}$	[0.30, 5.70]	$c_{21}$	0.88	
31	$c_{11}$	[0, 0.35]	$c_{21}$	[0, 0.34]	$d_3$
32	$c_{13}$	[5.65, 6.0]	$c_{21}$	[0, 0.34]	
33	$c_{12}$	[1.95, 4.05]	$c_{22}$	[1.97, 4.03]	
41	$c_{12}$	[2.38, 3.62]	$c_{22}$	[2.39, 3.61]	$d_4$
51	$c_{12}$	[2.67, 3.34]	$c_{22}$	[2.68, 3.32]	$d_5$

Таблиця 4

Параметри функцій належності нечітких причин

Параметр	$x_1$			$x_2$	
	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{21}$	$c_{22}$
$\beta$ -	0	3.00	6.00	0	3.00
$\sigma$ -	0.72	0.95	0.72	0.72	0.95

Набір правил в табл. 3 відповідає множині розв'язків системи нечітких логічних рівнянь (14), (15):

$$\begin{aligned} S(R, d_1) = & \{ \mu^{c_{11}} = 0.78; \mu^{c_{22}} \in [0.78, 1.0] \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{11}} \in [0.78, 1.0]; \mu^{c_{22}} = 0.78 \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{13}} = 0.78; \mu^{c_{22}} \in [0.78, 1.0] \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{13}} \in [0.78, 1.0]; \mu^{c_{22}} = 0.78 \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{12}} = 0.33; \mu^{c_{21}} = 0.33 \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(R, d_2) = & \{ \mu^{c_{11}} = 0.63; \mu^{c_{22}} \in [0.63, 1.0] \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{11}} \in [0.63, 1.0]; \mu^{c_{22}} = 0.63 \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{13}} = 0.63; \mu^{c_{22}} \in [0.63, 1.0] \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{13}} \in [0.63, 1.0]; \mu^{c_{22}} = 0.63 \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{12}} = 0.11; \mu^{c_{21}} = 0.40 \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(R, d_3) = & \{ \mu^{c_{11}} = 0.81; \mu^{c_{21}} \in [0.81, 1.0] \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{11}} \in [0.81, 1.0]; \mu^{c_{21}} = 0.81 \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{13}} = 0.81; \mu^{c_{21}} \in [0.81, 1.0] \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{13}} \in [0.81, 1.0]; \mu^{c_{21}} = 0.81 \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{12}} = 0.45; \mu^{c_{22}} = 0.45 \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(R, d_4) = & \{ \mu^{c_{12}} = 0.70; \mu^{c_{22}} \in [0.70, 1.0] \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{12}} \in [0.70, 1.0]; \mu^{c_{22}} = 0.70 \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(R, d_5) = & \{ \mu^{c_{12}} = 0.89; \mu^{c_{22}} \in [0.89, 1.0] \} \cup \\ & \cup \{ \mu^{c_{12}} \in [0.89, 1.0]; \mu^{c_{22}} = 0.89 \}, \end{aligned}$$

де терми причин у правилах  $A_i^{jp}$  визначаються максимальними розв'язками ( $\bar{m}^H$ ):

$$\mu_{H_3}^E(d_1) = (\bar{\mu}_{H_1}^{-H_1} = 0.33, \bar{\mu}_{H_2}^{-H_2} = 0.78, \bar{\mu}_{H_3}^{-H_3} = 0.33, \bar{\mu}_{H_4}^{-H_4} = 0.11, \bar{\mu}_{H_5}^{-H_5} = 0.33, \bar{\mu}_{H_6}^{-H_6} = 0.78),$$

$$\mu_{H_3}^E(d_2) = (\bar{\mu}_{H_1}^{-H_1} = 0.40, \bar{\mu}_{H_2}^{-H_2} = 0.63, \bar{\mu}_{H_3}^{-H_3} = 0.11, \bar{\mu}_{H_4}^{-H_4} = 0.11, \bar{\mu}_{H_5}^{-H_5} = 0.40, \bar{\mu}_{H_6}^{-H_6} = 0.63),$$

$$\mu_{H_3}^E(d_3) = (\bar{\mu}_{H_1}^{-H_1} = 0.81, \bar{\mu}_{H_2}^{-H_2} = 0.45, \bar{\mu}_{H_3}^{-H_3} = 0.45, \bar{\mu}_{H_4}^{-H_4} = 0.45, \bar{\mu}_{H_5}^{-H_5} = 0.81, \bar{\mu}_{H_6}^{-H_6} = 0.45),$$

$$\mu_{H_3}^E(d_4) = (\bar{\mu}_{H_1}^{-H_1} = 0.33, \bar{\mu}_{H_2}^{-H_2} = 0.33, \bar{\mu}_{H_3}^{-H_3} = 0.45, \bar{\mu}_{H_4}^{-H_4} = 0.70, \bar{\mu}_{H_5}^{-H_5} = 0.33, \bar{\mu}_{H_6}^{-H_6} = 0.33),$$

$$\mu_{H_3}^E(d_5) = (\bar{\mu}_{H_1}^{-H_1} = 0.21, \bar{\mu}_{H_2}^{-H_2} = 0.21, \bar{\mu}_{H_3}^{-H_3} = 0.45, \bar{\mu}_{H_4}^{-H_4} = 0.89, \bar{\mu}_{H_5}^{-H_5} = 0.21, \bar{\mu}_{H_6}^{-H_6} = 0.21).$$

Набір сполучених правил має таку структуру (рис. 3). Загальна кількість нечітких правил становить 14 з наступним розподілом правил по класах: 4 для  $d_1$ , 5 для  $d_2$ , 3 для  $d_3$ , 1 для  $d_4$  і  $d_5$ .

Лінгвістична інтерпретація інтервалів  $\beta$ -параметрів представлена в табл. 5, де для оцінки змінної  $x_1$  використовувались нечіткі терми *Низький* (Н), *вище Низького* (вН), *нижче Середнього* (нС), *Середній* (С), *вище Середнього* (вС), *нижче Високого* (нВ), *Високий* (В), а для оцінки змінної  $x_2$  використовувались нечіт-

кі терми *Низький (H)*, *нижче Середнього (нС)*, *Середній (С)*, *вище Середнього (вС)*, *Високий (В)*. Параметри функцій належності нечітких термів у правилах-розв'язках, представлені в табл. 6, 7. Функції належності нечітких термів вхідних змінних представлені на рис. 4.

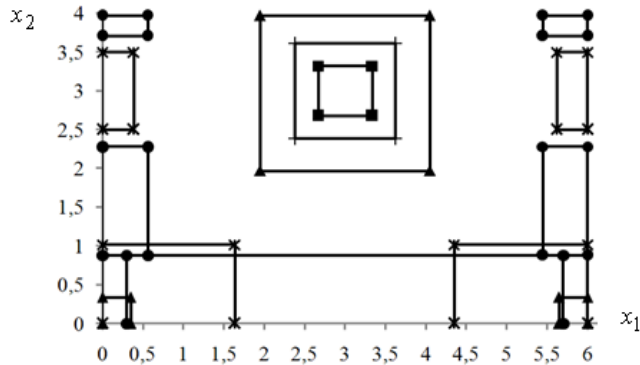


Рис. 3. Структура сполучених правил (границі класів позначено: \* -  $d_1$ ; • -  $d_2$ ;  $\Delta$  -  $d_3$ ; + -  $d_4$ ;  $\square$  -  $d_5$ )

Таблиця 5

Лінгвістична інтерпретація інтервальних правил

№	ЯКЩО		ТО
	$x_1$	$x_2$	$y$
11	H	C - вC	$d_1$
12	B	C - вC	
13	вH або нB	нC	
21	H	нC або B	$d_2$
22	B	нC або B	
23	нC - вC	H	
31	H	H	$d_3$
32	B	H	
33	нC або вC	C або B	
41	нC або вC	вC	$d_4$
51	C	вC	$d_5$

Таблиця 6

Параметри функцій належності нечітких термів змінної  $x_1$

Параметр	H	вH	нC	C	вC	нB	B
$\beta$ -	0.30	1.60	2.40	3.00	3.60	4.40	5.70
$\sigma$ -	0.75	0.80	0.50	0.60	0.50	0.80	0.75

Таблиця 7

Параметри функцій належності нечітких термів змінної  $x_2$

Параметр	H	нC	C	вC	B
$\beta$ -	0.30	0.90	2.40	3.00	3.60
$\sigma$ -	0.70	0.85	0.55	0.60	0.50

Трендові і сполучені нечіткі правила забезпечують апроксимацію об'єкта, яка показана на рис. 5.

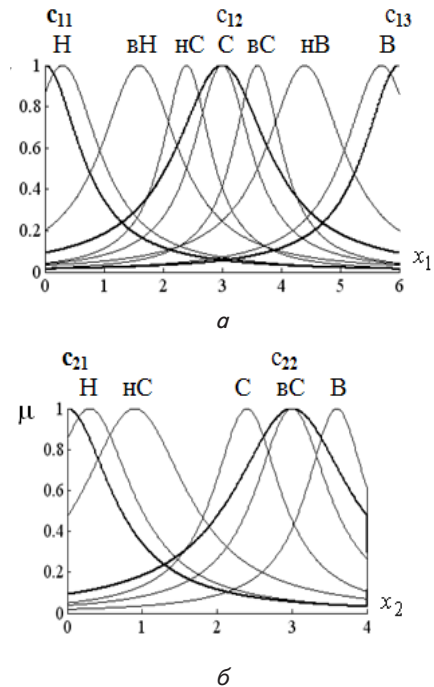


Рис. 4. Функції належності нечітких термів вхідних змінних: а -  $x_1$ ; б -  $x_2$

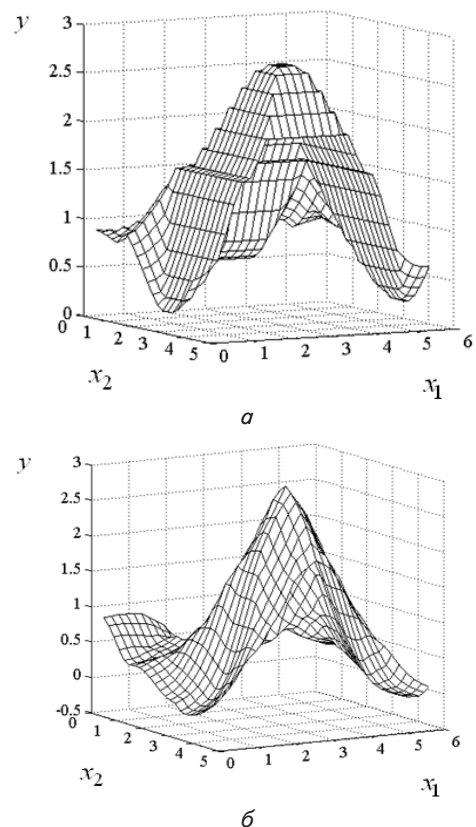


Рис. 5. Результати лінгвістичної апроксимації: а - трендовими правилами; б - сполученими правилами

Для трендових і сполучених правил точність виведення становить на рівні  $RMSE=0.7429$

і  $RMSE=0.5518$ , відповідно. Підвищення точності лінгвістичної апроксимації можливо за рахунок настройки нечітких відношень і правил методами, представленими в [1, 2].

## 6. Обговорення результатів оцінки складності алгоритму побудови нечітких правил

Порівняно із роботою [1], запропонований метод дозволяє замінити розв'язання задачі оптимізації з  $Z(2n+1)$  змінними для двопараметричних функцій належності і ваг правил на розв'язання послідовності  $Z$  задач оптимізації з  $2n$  змінними для верхніх і нижніх границь інтервалів. Порівняно із [19, 20] поетапне налаштування мір значимостей причин та їх комбінацій дозволило скоротити кількість змінних з  $2N$  до  $2n$  при налаштуванні форм функцій належності сполучених термів у розв'язках системи рівнянь нечітких відношень.

## 7. Висновки

Запропоновано метод генерування класифікаційних нечітких баз знань на основі розв'язання рівнянь нечітких відношень, що дозволяє уникнути селекції правил із множини правил-кандидатів. Система рівнянь нечітких відношень є одночасно носієм експертної інформації і генератором класифікаційних нечітких правил. Для цього причини і наслідки з'єднуються трендовими правилами або відношеннями, а міри значимостей причин і наслідків – сполученими правилами, які є якісними розв'язками системи рівнянь нечітких відношень для заданих класів виходу.

Отримано спосіб пониження складності задачі генерування класифікаційних нечітких баз знань за рахунок поетапного розв'язання задач оптимізації. Розв'язання рівнянь нечітких відношень за допомогою генетичного алгоритму забезпечує оптимальну кількість нечітких правил для кожного вихідного терму і оптимальну форму функцій належності вхідних термів для кожного лінгвістичного розв'язку.

## Література

1. Ротштейн, А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети [Текст] / А. П. Ротштейн. – Винница: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1999. – 320 с.
2. Rotshtein, A. Fuzzy evidence in identification, forecasting and diagnosis [Text] / A. Rotshtein, H. Rakytyanska. – Heidelberg: Springer, 2012. – 314 p.
3. Groetsch, C. W. Inverse problems in the mathematical sciences [Text] / C. W. Groetsch. – Braunschweig: Vieweg Verlag, 1993. – 152 p. doi: 10.1007/978-3-322-99202-4
4. Dubois, D. What are fuzzy rules and how to use them [Text] / D. Dubois, H. Prade // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – Vol. 84, Issue 2. – P. 169–189. doi: 10.1016/0165-0114(96)00066-8
5. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений [Текст] / Л. Заде. – М.: Мир, 1976. – 166 с.
6. Di Nola, A. Fuzzy relation equations and their applications to knowledge engineering [Text] / A. Di Nola, S. Sessa, W. Pedrycz, E. Sanchez. – Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1989. – 278 p. doi: 10.1007/978-94-017-1650-5
7. Peeva, K. Fuzzy relational calculus. Theory, applications and software [Text] / K. Peeva, Y. Kyosev. – New York: World Scientific, 2005. – 304 p. doi: 10.1142/5683
8. Ротштейн, А. П. Диагностика на основе нечетких отношений [Текст] / А. П. Ротштейн, А. Б. Ракитянская // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 12. – С. 113–130.
9. Rotshtein, A. Diagnosis problem solving using fuzzy relations [Text] / A. Rotshtein, H. Rakytyanska // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2008. – Vol. 16, Issue 3. – P. 664–675. doi: 10.1109/tfuzz.2007.905908
10. Rotshtein, A. Fuzzy logic and the least squares method in diagnosis problem solving [Text] / A. Rotshtein, H. Rakytyanska; In: Sarma R. D. (Ed.). – Genetic diagnoses. – New York: Nova Science Publishers, 2011. – P. 53–97.
11. Mellouli, N. Abductive reasoning and measures of similitude in the presence of fuzzy rules [Text] / N. Mellouli, B. Bouchon-Meunier // Fuzzy Sets and Systems. – 2003. – Vol. 137, Issue 1. – P. 177–188. doi: 10.1016/s0165-0114(02)00439-6
12. Eslami, E. Inverse approximate reasoning [Text] / E. Eslami, J. J. Buckley // Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – Vol. 87, Issue 2. – P. 155–158. doi: 10.1016/s0165-0114(96)00243-6
13. Bouchon-Meunier, B. Towards general measures of comparison of objects [Text] / B. Bouchon-Meunier, M. Rifqi, S. Bothorel // Fuzzy Sets and Systems. 1996. – Vol. 84, Issue 2. – P. 143–153. doi: 10.1016/0165-0114(96)00067-x
14. Setnes, M. Similarity measures in fuzzy rule base simplification [Text] / M. Setnes, R. Babuska, U. Kaymak, H. R. van Nauta Lemke // IEEE Transactions on System, Man, Cybernetics. Part B. – 1998. – Vol. 28, Issue 3. – P. 376–386. doi: 10.1109/3477.678632
15. Jin, Y. Fuzzy modeling of high-dimensional systems: complexity reduction and interpretability improvement [Text] / Y. Jin // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2000. – Vol. 8, Issue 2. – P. 212–221. doi: 10.1109/91.842154
16. Ishibuchi, H. Fuzzy rule selection by multi-objective genetic local search algorithms and rule evaluation measures in data mining [Text] / H. Ishibuchi, T. Yamamoto // Fuzzy Sets and Systems. – 2004. – Vol. 141, Issue 1. – P. 59–88. doi: 10.1016/s0165-0114(03)00114-3
17. Alcalá, R. Multiobjective genetic fuzzy rule selection of single granularity-based fuzzy classification rules and its interaction with the lateral tuning of membership functions [Text] / R. Alcalá, Y. Nojima, F. Herrera, H. Ishibuchi // Soft Computing. – 2011. – Vol. 15, Issue 12. – P. 2303–2318. doi: 10.1007/s00500-010-0671-2
18. Zadeh, L. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural language [Text] / L. Zadeh // Computers and Mathematics with Applications. – 1983. – Vol. 9, Issue 1. – P. 149–184. doi: 10.1016/0898-1221(83)90013-5

19. Rotshtein, A. Expert rules refinement by solving fuzzy relational equations [Text] / A. Rotshtein, H. Rakytyanska // In Proc. of the VIth IEEE Conference on Human System Interaction. Sopot, Poland, 2013. – P. 257–264. doi: 10.1109/hsi.2013.6577833
20. Rotshtein, A. Optimal design of rule-based systems by solving fuzzy relational equations [Text] / A. Rotshtein, H. Rakytyanska // Issues and Challenges in Artificial Intelligence. Studies in Computational Intelligence. – 2014. – Vol. 559. – P. 167–178. doi: 10.1007/978-3-319-06883-1\_14

*Дана стаття присвячена створенню математичної моделі процесу скловаріння шляхом отримання математичних моделей окремих фізико-хімічних явищ цього процесу. Розглянуто такі фізико-хімічні аспекти, як горіння палива, плавлення шихти, гідро- та газодинаміка розплаву скломаси та газового середовища, теплообмін у скловарній печі. Отримано температурні поля скловарної печі*

*Ключові слова: математична модель скловарної печі, рівняння Нав'є-Стокса, температурні поля*

*Данная статья посвящена созданию математической модели процесса стекловарения путем получения математических моделей отдельных физико-химических явлений этого процесса. Рассмотрены такие физико-химические аспекты, как горение природного газа, плавления шихты, гидро- и газодинамика расплава стекломассы и газовой среды, теплообмен в стекловаренной печи. Получены температурные поля стекловаренной печи*

*Ключевые слова: математическая модель стекловаренной печи, уравнения Навье-Стокса, температурные поля*

УДК 681.3.06  
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.36069

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСНОВНИХ ФІЗИКО- ХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ВИРОБНИЦТВІ СКЛА

**В. С. Цапар**

Старший викладач\*

E-mail: cwst@ukr.net

**О. А. Жученко**

Кандидат технічних наук, доцент\*

E-mail: azhuch@ukr.net

\*Кафедра автоматизації хімічних виробництв  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»  
пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056

## 1. Вступ

Сучасний світовий ринок вимагає постійного вдосконалення виробництва та зменшення затрат на одиницю продукції. Особливо гостро це відчувається у скловарному виробництві в Україні, через постійно зростаючі ціни на енергоносії, зокрема природний газ, який є основним джерелом тепла при виробництві скла. Зважаючи на це, необхідно постійно шукати шляхи вдосконалення процесу виробництва скла та оптимізації затрат на його виробництво. Як правило, експерименти на реально працюючому об'єкті практично не можливі, саме через це виникає потреба створення імітаційних моделей скловарної печі шляхом математичного моделювання.

## 2. Аналіз літературних досліджень та постановка проблеми

Загальною науковою проблемою є отримання математичної моделі процесу скловаріння котра б відображала всі складові цього процесу у повному обсязі. Література, присвячена математичному моделюванню процесу скловаріння доволі багаточисельна. У робо-

тах [1–3] розглянуто математичні моделі, що базуються на зональному методі розрахунку теплообміну випромінюванням. У роботі [4] на основі зонального методу моделювання теплообміну в газовому просторі печі отримані залежності між довжиною факела і його яскравістю та величиною падаючого на скломасу теплового потоку. Важливі розробки у сфері математичного моделювання скловарних печей містяться у працях [5–7]. В роботах [5–8] наведено промислову точку зору щодо того, які вимоги виносяться до моделей, та підкреслено теми, що потребують подальшого дослідження та розвитку. В роботі [6] описано ключові явища, які присутні у процесі варки та допоміжних процесах (таких, як випаровування на поверхні скломаси, іржавіння вогнетривкового покриття) та узагальнено рівняння переносу, що описують гідродинамічні процеси та явища теплопереносу у скломасі. У роботах [9–10] висвітлено сучасний підхід до моделювання температурних полів схожих теплових об'єктів за допомогою методів обчислювальної гідродинаміки та сучасних програмних засобів.

Оскільки існує значна складність проведення досліджень на реальній працюючій печі, одним із способів уникнути цих досліджень є математичне моделювання. У скловарній печі одночасно протікає багато